Toets Mechanica **7-1-2010**

Opgave 1 (7 punten)

a) $m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma|v|\mathbf{v} + q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - mg\,\mathbf{k}$

b) $m\ddot{x} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;\dot{x} - q\,\dot{z}\,B_0$

$m\ddot{y} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;\dot{y}$

$m\ddot{z} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;\dot{z} + q\,\dot{x}\,B_0 - mg$

Opgave 2 (7 punten)

Een kracht is conservatief als de rotatie in ieder punt gelijk is aan nul.

$$\vec{\nabla}\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$
$$= A(2zy - xy)\mathbf{i} + A(0 - y^2)\mathbf{j} + A(yz - x^2)\mathbf{k} \neq 0$$

F is dus niet conservatief.

Opgave 3 (7 punten)

Bewegingsvergelijking voor een systeem met een variabele massa:

$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} - \dot{m}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Hierin **is v** de snelheid van het systeem met de variabele massa en **u** is de snelheid van de massa die wordt toegevoegd.
In dit vraagstuk is alleen de x component van belang: $F = m\dot{v} + \dot{m}v$
NB: De x component van **u** is nul omdat het zand vertikaal valt.
Als de wagon een constante snelheid heeft dan geldt $\dot{v} = 0$.
d.w.z. $F = +\dot{m}v = Av$

Opgave 4

a) Behoud van kinetische energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}2mu_2^2 \quad\rightarrow\quad v_0^2 = u_1^2 + 2u_2^2 \qquad (1)$$

Impulsbehoud:

$$m\mathbf{v_0} = m\mathbf{u_1} + m\mathbf{u_2}$$

Dit geeft voor de x component:

$$mv_0 = mu_1 \cos\varphi + 2mu_2 \cos(45^\circ) \quad \rightarrow \quad v_0 = u_1 \cos\varphi + \sqrt{2}\,u_2 \qquad (2)$$

en voor de y component:

$$0 = mu_1 \sin\varphi - 2mu_2 \sin(45^\circ) \quad \rightarrow \quad 0 = u_1 \sin\varphi - \sqrt{2}\,u_2 \qquad (3)$$

b) Uit de vergelijkingen (1), (2) en (3) moeten u_1, u_2 en φ worden opgelost:

Eerst φ elimineren:

$$(3) \quad \rightarrow \quad u_1 \sin\varphi = \sqrt{2}\,u_2 \quad \rightarrow \quad (u_1 \sin\varphi)^2 = 2\,u_2^{\,2}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad u_1 \cos\varphi = v_0 - \sqrt{2}u_2 \quad \rightarrow \quad (u_1 \cos\varphi)^2 = v_0^{\,2} - 2\sqrt{2}\,v_0\,u_2 + 2\,u_2^{\,2}$$

optellen geeft: $u_1^{\,2} = v_0^{\,2} - 2\sqrt{2}\,v_0\,u_2 + 4u_2^{\,2}$ (4)

Uit (1) en (4) moeten nu u_1 en u_2 worden opgelost:

Uit (1) volgt: $u_1^{\,2} = v_0^{\,2} - 2u_2^{\,2}$ (5)

(4) en (5) geven:

$$v_0^{\,2} - 2u_2^{\,2} = v_0^{\,2} - 2\sqrt{2}\,v_0\,u_2 + 4u_2 \quad \rightarrow \quad 6u_2^{\,2} - 2\sqrt{2}\,u_2\,v_0 = 0 \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,v_0 = 0{,}471\,v_0$$

(opmerking: de oplossing $u_2 = 0$ moet verworpen worden, want dat is de niet fysische situatie waarbij deeltje 1 dwars door deeltje 2 heen beweegt zonder te botsen.)

Met behulp van (5) vindt men:

$$u_1^{\,2} = v_0^{\,2} - 2\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{5}{9}v_0^{\,2} \rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{3}\sqrt{5}\,v_0 = 0{,}745\,v_0$$

c) Nu u_1 en u_2 bekend zijn kan met behulp van (3) $\sin\varphi$ worden gevonden:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}\,u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{2}\,\frac{1}{3}\sqrt{2}\,v_0}{\frac{1}{3}\sqrt{5}\,v_0} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894 \quad \rightarrow \quad \varphi = 63{,}4^\circ$$

d) $$v_{CM} = \frac{mv_0}{m + 2m} = \frac{v_0}{3}$$

e) Impulsbehoud: hetzelfde als bij a)

Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv_0^{\,2} = \frac{1}{2}mu_1^{\,2} + \frac{1}{2}2mu_2^{\,2} + Q$ met $Q = \frac{1}{10}mv_0^{\,2}$

$$\frac{2}{5}mv_0^{\,2} = \frac{1}{2}mu_1^{\,2} + \frac{1}{2}2mu_2^{\,2} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{5}v_0^{\,2} = u_1^{\,2} + 2u_2^{\,2}$$